ПРИЛОЖЕНИЕ 6

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по выполнению практических работ дисциплины ОП.01 «Математические методы решения прикладных профессиональных задач»

Специальность
21.02.01 Разработка нефтяных и газовых месторождений

Квалификация
техник-технолог

Форма обучения
очная

Бузулук 2024

Содержание

Введение

Сборник практических работ служит для организации практических занятий по математике в объеме 20 часов. Данное пособие предназначено для студентов 2 курса и разработано в соответствии с рабочей программой по математике. Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а также для получения практических знаний. Практические задания выполняются студентом самостоятельно, с применением знаний и умений, полученных на уроках, а так же с использованием необходимых пояснений, полученных от преподавателя при выполнении практического задания.

Целью практических занятий является формирование учебных практических умений по математике и содействие оптимальному освоению студентами учебного материала. Выполнение студентами практических работ направлено на обобщение, систематизацию, углубление, закрепление полученных знаний по конкретным темам, формирование умений применять полученные знания на практике, формирование профессионально значимых качеств таких, как самостоятельность, ответственность, точность.

В сборнике содержится 16 практических работ. Практическое занятие проводится в учебной аудитории. Оценки за выполнение практических работ выставляются по четырёхбалльной системе. Практические работы выполняются в специально заведённых для практических работ тетрадях.

Методические указания предназначены для оказания помощи студентам при выполнении практических работ по дисциплине «Математические методы решения прикладных профессиональных задач»

В результате проведения практических занятий по дисциплине студент должен:
уметь:

- уметь выполнять преобразование алгебраических выражений, содержащих корни и логарифмы;
- уметь применять методы дифференциального и интегрального исчисления;
- уметь решать задачи на нахождение площадей поверхностей и объёмов тел вращения:
- уметь применять основные положения теории вероятностей и математической статистики в профессиональной деятельности;

знать:

- основы интегрального и дифференциального исчисления.
- значение математики в профессиональной деятельности;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры;

Оценивание выполнения *практических заданий*

4-балльная шкала	Показатели	Критерии
Отлично	1. Полнота выполнения практического задания; 2. Своевременность выполнения задания; 3. Последовательность и рациональность выполнения задания; 4. Самостоятельность решения;	Задание решено самостоятельно. При этом составлен правильный алгоритм решения задания, в логических рассуждениях, в выборе формул и решении нет ошибок, получен верный ответ, задание решено рациональным способом.
Хорошо		Задание решено с помощью преподавателя. При этом составлен правильный алгоритм решения задания, в логическом рассуждении и решении нет существенных ошибок; правильно сделан выбор формул для решения; есть объяснение решения, но задание решено нерациональным способом или допущено не более двух несущественных ошибок, получен верный ответ.
Удовлетворительно		Задание решено с подсказками преподавателя. При этом задание понято правильно, в логическом рассуждении нет существенных ошибок, но допущены существенные ошибки в выборе формул или в математических расчетах; задание решено не полностью или в общем виде.
Неудовлетвори- тельно		Задание не решено.

Практическая работа №1 «Действия со степенями»

Цель работы: обобщить и систематизировать знания по теме «Степень. Действия со степенями»; закрепить умения использовать полученные знания для выполнения заданий

Теоретические сведения к практической работе:

Свойства степени

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
3. $(a^m)^n = a^{mn}$;
4. $(ab)^m = a^m \cdot b^m$;
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$.

Задания для самостоятельного решения:

	1 вариант	2 вариант
1	Упростите: $a^{2,3} \cdot a^{1,1}$	Упростите: $a^{2,3} : a^{1,1}$
2	Найдите значение выражения: $\frac{5^{6a}}{25^a}$ при $a=\frac{1}{4}$	Найдите значение выражения: $\frac{6^{4a}}{36^a}$ при $a=\frac{1}{2}$
3	Выполните действия: $3a^{2,4}+2(a^{1,2})^2$	Выполнитедействия: $3a^{1,8}+(2a^{0,9})^2$
4	Вычислите $36^{\frac{1}{2}} - 7,2^0$	Вычислите $64^{\frac{1}{3}} + 5,7^0$
5	Найдите наименьшее из указанных чисел $\sqrt[3]{4}$; $16^{0,2}$; $0,5^{-3}$; 8^{-3}	Найдите наибольшее из указанных чисел $\sqrt[3]{4}$; $16^{0,2}$; $0,5^{-3}$; 8^{-3}
6	Упростите выражение: $\frac{(2a^{0,25})^2 \cdot 0,5a^{1,5}}{a^3}$	Упростите выражение: $\frac{(4a^{0,5})^2 \cdot 0,25a^{1,5}}{a^{2,5}}$
7	Преобразуйте выражение $\frac{x-y}{x^{0,5}-y^{0,5}} - y^{0,5}$	Преобразуйте выражение $\frac{x-y}{x^{0,5}+y^{0,5}} + y^{0,5}$
8	Вычислите $\frac{(8)^{\frac{2}{3}} \cdot 12^{\frac{1}{2}}}{3^{0,5}}$	Вычислите $\frac{(16)^{\frac{3}{4}} \cdot 18^{\frac{1}{2}}}{2^{0,5}}$

Практическая работа № 2 «Преобразование выражений, содержащих корень»

Цель работы: повторить и обобщить умения вычислять корень разной степени и применение этих действий для преобразования выражений содержащих корень

Теоретические сведения к практической работе:

Определение: Арифметическим корнем натуральной степени $n \geq 2$ из неотрицательного числа a называется

неотрицательное число, n – ая степень которого равна a.

Примеры

1. $\sqrt[3]{64}=4$, так как 4 0 и $4^3 = 64$ 2. $\sqrt[3]{125}=5$, так как 5 0 и $5^3 = 125$

Из определения арифметического корня следует, что если $a \geq 0$,
то $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ и $\sqrt[n]{a^n}=a$

Свойства арифметического корня:

Арифметический корень n – ой степени обладает следующими свойствами: если $a \geq 0$, $b \geq 0$ и n, m - натуральные числа, причём $n \geq 2$, $m \geq 2$, то

1. $\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ 2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

3. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$ 4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

Корень нечётной степени из отрицательного числа a вычисляется следующим образом:

$\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{|a|}$

Например, $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{2^5}=-2$

Примеры применения свойств арифметического корня.

1. $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}=\sqrt[4]{27\cdot 3}=\sqrt[4]{81}=\sqrt[4]{3^4}=3$

2. $\sqrt[3]{\frac{256}{625}}:\sqrt[3]{\frac{4}{5}}=\sqrt[3]{\frac{256}{625}:\frac{4}{5}}=\frac{\sqrt[3]{64}}{\sqrt[3]{125}}=\frac{4}{5}$

3. $\sqrt[7]{5^{21}}=\sqrt[7]{\left(5^3\right)^7}=5^3=125$

4. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{4096}}=\sqrt[12]{2^{12}}=2$

5. $\left(\sqrt[4]{9}\right)^{-2}=\sqrt[4]{9^{-2}}=\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}$

Упростить выражение $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}$, где $a>0$, $b>0$.

Используя свойства арифметического корня, получаем $\dfrac{\left(\sqrt[4]{a^3b^2}\right)^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}}=\dfrac{a^3b^2}{\sqrt[6]{a^{12}b^6}}=\dfrac{a^3b^2}{a^2b}=ab.$ ◁

Задания для самостоятельного решения:

1 вариант

1. Вычислить: а) $\sqrt[5]{3^{10}\cdot 2^{15}}$; б) $\sqrt[4]{3^{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^8}$

2. Упростить выражение: а) $\left(\sqrt[3]{y^2}\right)^3$; б) $\left(\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{b^3}\right)^{12}$;

3. Вычислить: а) $\dfrac{\sqrt[4]{32}}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[6]{27^2}-\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; б) $\sqrt[3]{11-\sqrt{57}}\cdot\sqrt[3]{11+\sqrt{57}}$;

в) $\left(\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right):\sqrt[3]{2}$

4. Упростить выражение: $\sqrt[3]{\sqrt[3]{a^{18}}}+\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^4}}\right)^3$

2 вариант

1. Вычислить: а) $\sqrt[3]{2^3\cdot 5^6}$ б) $\sqrt[10]{4^{30}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{20}}$

2. Упростить выражение: ; а) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{a^2b}}\right)^6$; б) $\left(\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{b}\right)^6$

3. Вычислить: а) $\sqrt[3]{3\frac{3}{8}}+\sqrt[4]{18}\cdot\sqrt[4]{4\frac{1}{2}}-\sqrt{\sqrt{256}}$; б) $\sqrt[4]{17-\sqrt{33}}\cdot\sqrt[4]{17+\sqrt{33}}$;
в) $\left(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{2}\right)$

4. Упростить выражение: $\sqrt[3]{\sqrt{x^6 y^{12}}^5 \left(\sqrt[5]{xy^2}\right)}$

Практическая работа №3 *«Преобразование выражений, содержащих логарифмы»*

Цель: систематизировать и обобщить знания, умения и навыки, связанные с применением методов преобразования логарифмических выражений.

Теоретические сведения к практической работе:

$(a>0, a\neq 1,\quad b>0,\quad c>0, c\neq 1)$

1. $log_a\, a = 1;$
2. $log_a\, 1 = 0;$
3. $a^{log_a b} = b;$
4. $log_a\,(bc) = log_a\, b + log_a\, c;$
5. $log_a\, \frac{b}{c} = log_a\, b - log_a\, c;$
6. $log_a\, b^k = k log_a\, b;$
7. $log_a\, \sqrt[m]{b} = \frac{log_a\, b}{m};$
8. $log_{a^m}\, b^k = \frac{k}{m} log_a\, b;$
9. $log_a\, b = \frac{log_c b}{log_c a};$
10. $log_a\, b = \frac{1}{log_b a}, b\neq 1;$

Следствие из свойства (10):

11. $log_a b \cdot log_b\, a = 1;$
12. $a^{log_c b} = b^{log_c a}.$

Задание 1. Найдите значение выражения	
Пример: $\log_a(a^4b^9)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$. $\log_a(a^4b^9) = \log_a a^4 + \log_a b^9 = 4 + 9\log_a b = 4 + \frac{9}{\log_b a} = 4 + \frac{9}{\frac{1}{3}} = 4 + 27 = 31$ Решение	
1. $\log_a(ab^3)$ **, если** $\log_b a = \frac{1}{7}$. 2. $\log_a(ab^2)$ **, если** $\log_b a = \frac{2}{11}$. 3. $\log_a(a^3b^8)$ **, если** $\log_b a = \frac{1}{3}$.	1. $\log_a(a^4b^6)$ **, если** $\log_b a = \frac{2}{15}$. 2. $\log_a(a^6b^3)$ **, если** $\log_b a = \frac{1}{11}$. 3. $\log_a(a^7b^6)$ **, если** $\log_b a = \frac{1}{5}$.

4. $\log_a(a^2b^6)$, **если** $\log_b a = \dfrac{2}{11}$.	4. $\log_a(a^4b)$, **если** $\log_b a = \dfrac{1}{19}$.

Задание 2. Найдите значение выражения

Пример 1. $7\cdot 5^{\log_5 4} = 7\cdot 4 = 28$ Пример 2. $5^{\log_{25}49} = 5^{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\log_5 7} = 7$	
1. $81^{\log_9 8}$. 2. $49^{\log_7 8}$. 3. $36^{\log_6 5}$. 4. $25^{\log_5 11}$	1. $16^{\log_4 9}$. 2. $36^{\log_6 11}$. 3. $9^{\log_3 4}$. 4. $216^{\log_6 4}$

Задание 3. Найдите значение выражения

$\log_5 9\cdot\log_3 25 = 2\log_5 3\cdot 2\log_3 5 = 4\log_5 3\cdot\dfrac{1}{\log_5 3} = 4$.	
1. $\log_5 7\cdot\log_7 25$. 2. $\log_3 13\cdot\log_{13} 9$. 3. $\log_4 13\cdot\log_{13} 16$. 4. $\log_7 8\cdot\log_8 49$.	1. $\log_7 5\cdot\log_5 49$. 2. $\log_7 4\cdot\log_4 49$. 3. $\log_7 9\cdot\log_9 49$. 4. $\log_5 7\cdot\log_7 25$.

Задание 4. Найдите значение выражения

$\dfrac{9^{\log_5 50}}{9^{\log_5 2}} = 9^{\log_5 50-\log_5 2} = 9^{\log_5\frac{50}{2}} = 9^2 = 81$	
1. $\dfrac{6^{\log_{12}432}}{6^{\log_{12}3}}$. 2. $\dfrac{5^{\log_7 98}}{5^{\log_7 2}}$. 3. $\dfrac{5^{\log_6 108}}{5^{\log_6 3}}$. 4. $\dfrac{2^{\log_{10}200}}{2^{\log_{10}2}}$.	1. $\dfrac{5^{\log_{13}507}}{5^{\log_{13}3}}$. 2. $\dfrac{9^{\log_{12}288}}{9^{\log_{12}2}}$. 3. $\dfrac{6^{\log_{10}300}}{6^{\log_{10}3}}$. 4. $\dfrac{7^{\log_4 32}}{7^{\log_4 2}}$.

Задание 5. Найдите значение выражения

$(1-\log_4 32)(1-\log_8 32) = \left(1-\dfrac{5}{2}\right)\left(1-\dfrac{5}{3}\right) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)\left(-\dfrac{2}{3}\right) = 1.$ Пояснения

$\log_4 32=\log_{2^2}2^5=\dfrac{5}{2}$; $\log_8 32=\log_{2^3}2^5=\dfrac{5}{3}$.	
1. $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$. 2. $(1-\log_2 12)(1-\log_6 12)$. 3. $(1-\log_6 24)(1-\log_4 24)$. 4. $(1-\log_8 48)(1-\log_6 48)$.	1. $(1-\log_5 45)(1-\log_9 45)$. 2. $(1-\log_9 18)(1-\log_2 18)$. 3. $(1-\log_7 14)(1-\log_2 14)$. 4. $(1-\log_7 56)(1-\log_8 56)$.

Задание 6. Найдите значение выражения

$3\log_2\sqrt[3]{2}=\log_2\sqrt[3]{2}^3=\log_2 2=1$	
1. $6\log_7\sqrt[3]{7}$. 2. $104\log_3\sqrt[8]{3}$ 3. $75\log_{11}\sqrt[5]{11}$ 4. $50\log_{10}\sqrt[5]{10}$	1. $64\log_5\sqrt[4]{5}$ 2. $10\log_6\sqrt[4]{6}$. 3. $18\log_5\sqrt[9]{5}$. 4. $21\log_8\sqrt[7]{8}$.

Задание 7. Найдите значение выражения

$\dfrac{\log_9 10}{\log_9 11}+\log_{11}0,1=\log_{11}10+\log_{11}0,1=\log_{11}(10\cdot 0,1)=\log_{11}1=0$	
1. $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7}+\log_7 0,2$. 2. $\dfrac{\log_3 5}{\log_3 7}+\log_7 0,2$. 3. $\dfrac{\log_8 20}{\log_8 5}+\log_5 0,05$. 4. $\dfrac{\log_2 20}{\log_2 12}+\log_{12}0,05$.	1. $\dfrac{\log_2 5}{\log_2 6}+\log_6 0,2$. 2. $\dfrac{\log_2 10}{\log_2 9}+\log_9 0,1$. 3. $\dfrac{\log_9 5}{\log_9 14}+\log_{14}0,2$. 4. $\dfrac{\log_4 5}{\log_4 7}+\log_7 0,2$

Задание 8. Найдите значение выражения

$\log^2_{\sqrt{12}}1728=\left(\log_{\sqrt{12}}1728\right)^2=\left(\log_{12^{\frac{1}{2}}}12^3\right)^2=\left(\dfrac{3}{\frac{1}{2}}\log_{12}12\right)^2=6^2=36$	
1. $\log^2_{\sqrt{7}}49$. 2. $\log^2_{\sqrt{11}}121$.	1. $\log^3_{\sqrt{7}}7$. 2. $\log^2_{\sqrt{13}}169$.

3. $\log^2_{\sqrt{2}} 4$.	3. $\log^2_{\sqrt{7}} 49$.
4. $\log^2_{\sqrt{8}} 512$.	4. $\log^2_{\sqrt{5}} 125$.

Задание 9. Найдите значение выражения

$5^{2+\log_5 6}$. **Пояснение.** Выполним преобразования: $5^{2+\log_5 6} = 5^2 \cdot 5^{\log_5 6} = 25 \cdot 6 = 150$.	
1. $5^{3+\log_5 2}$.	1. $3^{3+\log_3 6}$.
2. $5^{3+\log_5 2}$.	2. $9^{2+\log_9 6}$.
3. $3^{2+\log_3 7}$.	3. $6^{2+\log_6 8}$.
4. $8^{2+\log_8 13}$.	4. $3^{2+\log_3 7}$

Задание 10. Вычислите значение выражения:

$(2^{\log_7 5})^{\log_5 7} = 2^{\log_5 7 \cdot \log_7 5} = 2^{\log_5 7 \cdot \frac{1}{\log_5 7}} = 2^1 = 2$	
1. $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$.	1. $(5^{\log_5 7})^{\log_7 2}$.
2. $(5^{\log_3 7})^{\log_5 3}$.	2. $(7^{\log_5 3})^{\log_7 5}$.
3. $(3^{\log_2 5})^{\log_5 2}$.	3. $(3^{\log_3 2})^{\log_2 3}$.
4. $(5^{\log_7 2})^{\log_2 7}$.	4. $(7^{\log_7 2})^{\log_2 5}$

Практическое занятие №5 «Вычисление производных высших порядков

Цель: формирование умений вычислять производные высших порядков

Теоретические сведения к практической работе:

Производные высших порядков

Производная f '(x) от функции f(x) называется также ***производной первого порядка***. В свою очередь производная от функции f '(x) называется ***производной второго порядка*** от функции f(x) и обозначается f ''(x). Аналогично определяется производная третьего порядка, обозначаема f '''(x) и так далее, ***производная n-го порядка*** обозначается $f^{(n)}(x)$.

Понятие дифференциала

Пусть функция y=f(x) определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда если существует такое число A, что приращению Δy этой функции в точке x_0, соответствующее приращение Δx аргумента, представимо в виде:

$\Delta y = A\cdot\Delta x + L(\Delta x)\cdot\Delta x$,

где lim L (Δx) = 0, то функция f(x) называется дифференцируемой в

$\Delta x \to 0$

точке x_0. При этом главная, линейная относительно Δx, часть этого приращения, т.е. $A\cdot \Delta x$, называется ***дифференциалом*** функции в точке x_0 и обозначается dy или df (x_0).

Пример. Найти производные функций.

1) $f(x) = 2x^5+3x+6$;

$f'(x)'=(2x^5+3x+6)'=(2x^5)'+(3x)'+(6)'=10x^4+3$.

2) $f(x) = \ell^2+4^x$;

$f(x)'=(\ell^2+4^x)'=(\ell^2)'+(4^x)'=0+4^x\cdot \ln 4=4^x \ln 4$.

3) $f(x)=2^x\cdot x^4$;

$f'(x)=(2^x\cdot x^4)'=(2^x)'\cdot x^4 + 2^x\cdot (x^4)' = 2^x \ln 2\cdot x^4 +2^x\cdot 4x^3 = 2^x x^3 (x \ln 2+4)$.

4) $f(x) = \frac{x^2}{l^x}$;

$l^x ¿^2$
¿

$f'(x) =\left(\frac{x^2}{l^x}\right)= \frac{(x^2)'\cdot l^x - x^2\cdot (l^x)'}{¿} = \frac{2x\cdot l^x - x^2 l^x}{l^{2x}} = \frac{2x - x^2}{l^x}$.

5) $f(x)=5\sin x + \log 6x$;

$f'(x) = (5\sin x - \log 6x)'=(5\sin x)' - (\log 6x)= 5\cos x - \frac{1}{x\ln 6}$.

6) $f(x)=(2-x^3)^5$;

$f'(x) =((2-x^3)^5)'=5\cdot(2-x^3)^4\cdot (2-x^3)'=5\cdot(2-x^3)^4\cdot(-3x^2)=-15x^2\cdot(2-x^3)^4$.

7) $f(x)=\sqrt{3+l^x}$;

$f'(x)=(\sqrt{3+l^x})'= \frac{1}{2\sqrt{3+l^x}}\cdot(3+l^x)'= \frac{1}{2\sqrt{3+l^x}}\cdot l^x = \frac{l^x}{2\sqrt{3+l^x}}$.

Пример. Найти производные функций при заданном значении аргумента.

1) $f(x) = 2x^3-5x^2+4$, $y'(2)$;

$f'(x) = 2\cdot 3x^2 - 5\cdot 2x = 6x^2 - 10x$; $y'(2) = 6\cdot 2^2 -10\cdot 2 = 6\cdot 4 - 20=4$.

2) $f(x) = 2\ell^x + 3\cos x$, $y'(0)$;

$f'(x) = 2\ell^x + 3\cdot(-\sin x) = 2\ell^x - 3\sin x$; $y'(0)= 2\ell^0 - 3\sin 0 = 2\cdot 1 - 3\cdot 0=2$.

Пример. Найти производные указанных порядков для заданных функций.

f (x) = sin 3 x, f'''(x);

f '(x) = (sin 3 x)' = 3cos 3x; f''(x)= (3cos 3x)' = -9 sin 3 x;

f'''(x) = (- 9 sin 3 x)' = -27cos 3x.

Задание 1. Найти производные второго и третьего порядков для следующих функций:

1. $y=\ln\left(\sin\sqrt{x}\right)$
2. $y=\ln\sqrt{1-2x^2}$
3. $y=\frac{1}{x^2+1}$
4. $y=\arcsin\frac{1}{x}$
5. $y=e^x+x+1$
6. $y=\frac{2x-4}{4x+3}$
7. $y=\ln^2 x-6$

Задание 2. Найти частные производные от функции

1. $u=x^2+5y$
2. $u=8e^{xy}$
3. $u=ye^x$
4. $u=\frac{x+y^2}{z}$
5. $u=\ln\frac{x}{y}$
6. $u=\sqrt{x^2+y-z}$

ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА № 6 «Вычисление производных сложных функций».

Цель: научиться вычислять производные по таблице производных и производные сложных функций.

Задания

Вариант №1

1. Найдите производную функций:

1) f(x) = ctg x +2x^3 – 2^x , 2) f(x) = x^2 sinx, 3) f(x) = $\frac{\ln x}{\cos x}$,

4) $f(x) = (3x^2 – 2tgx)^5$, 5) $f(x) = \frac{5}{x^3} - 3x + \frac{3}{x} - 10$.

6) $f(x)= \frac{\sin x}{x}$ 7) $f(x)=3\sin2x – 2\cos3x$

2. Точка движется по закону $S = 3t^3 – 12t +5$. Найдите скорость движения при $t = 2$с.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой

$y = 3\cos x+\sin x$ в точке $x_0 = п$.

Вариант №2

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \frac{12}{x^2} - x + \frac{7}{x} + 8\sqrt{x}$, 2) $f(x) = (x^2 – 2\sin x)^3$, 3) $f(x) = \frac{5^x}{\ln x}$,

4) $f(x) = x^2 tgx$, 5) $f(x) = 5\cos x +x^5 – e^x$.

6) $f(x)=x^3+\cos x$. 7) $f(x)=3^{4x} +x^2$

2.Точка движется по закону $S =2t^3 + t -5$. Найдите скорость движения при $t = 3$с.

3.Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = e^x + \ln x$ в точке

$x_0 = 1$.

Вариант №3

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \cos x +6x^4 – 4^x$, 2) $f(x) = x^3 ctgx$, 3) $f(x) = \frac{e^x}{\sin x}$,

4) $f(x) = (2x^3 – 5\ln x)^3$, 5) $f(x) = \frac{2}{x^4} - 3x + \frac{7}{x} +1$.

6) $f(x)=2^x + 1$ 7) $f(x)=\sin(x+x^3) - \frac{1}{2}x^4$.

2. Точка движется по закону $S = 2t^3 – 2t +5$. Найдите скорость движения при $t = 3$с.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой

$y = 3\log_2 x-5$ в точке $x_0 = 3$.

Вариант №4

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \frac{6}{x^5} - x^7 + \frac{7}{x} - \sqrt{x}$, 2) $f(x) = (5x – 4\cos x)^5$, 3) $f(x) = \frac{3^x}{x^5}$,

4) $f(x) = x^2 \operatorname{tg} x$, 5) $f(x) = 5\sin x + x^6 – 8e^x$.

6) $f(x)=\cos x – x$ 7) $f(x)= -e^x + 3x^{3x}$

2. Точка движется по закону $S = t^3 – 4t$. Найдите скорость движения при t = 2с.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой

$y = 3(x^3 +5)$ в точке $x_0 = 2$.

Вариант №5

1. Найдите производную функций:

1) $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$, 2) $f(x) = (x^2 – e^x)^5$, 3) $f(x) = \frac{1}{x^9} - 5x^4 + \frac{6}{\sqrt{x}} - 3$,

4) $f(x) = x^5 \ln x$, 5) $f(x) = \sqrt{x} - x^2 – 2^x$

6 $f(x)=x^5 – \sin x$ 7) $f(x)=x^4 + \cos(x+3x^2)$

2. Точка движется по закону $S = t^3 + 12t -5$. Найдите скорость движения при t = 2с.

3. Определите угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой

$y = 3/x$ в точке $x_0 = 3$.

Практическая работа №7 «Исследование функций с помощью производной»

Цели: научиться проводить исследование функции с помощью производной и строить графики функций.

Краткая теоретическая справка

Схема исследования функции

1. Найти область определения функции;
2. Исследовать функцию на четность, нечетность, периодичность;
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат;
4. Исследовать функцию на монотонность, то есть найти промежутки возрастания и убывания функции;
5. Найти точки экстремума и экстремальные значения функции;
6. Построить график функции.

1. Находим область определения *D(f)* функции $y = f(x)$.

2. Проверяем функцию на четность.

Если $f(-x) = f(x)$, то функция четная, график функции симметричен относительно оси OY.

Если $f(-x) = - f(x)$, то функция нечетная, график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

В противном случае функция является ни четной, ни нечетной.

3. Если функция периодическая, то находим период функции.

4. Находим точки пересечения графика с осями координат.

Находим нули функции - это точки пересечения графика функции с осью абсцисс (Ох).

Для этого мы решаем уравнение $f(x) = 0$.

Находим точку пересечения графика функции с осью ординат (Оу). Для этого ищем значение функции при $x=0$.

5. Находим промежутки знакопостоянства функции, то есть промежутки, на которых функция сохраняет знак. Это нам потребуется для контроля правильности построения графика.

Чтобы найти промежутки знакопостоянства функции, нам нужно решить неравенства $f(x)\ 0$ и $f(x)$.

6. Исследуем функцию с помощью производной: находим промежутки возрастания и убывания функции, а также точки максимума и минимума.

Для этого мы следуем привычному алгоритму.

а) Находим производную $f'(x)$ $f'(x)$

б) Приравниваем производную к нулю и находим корни уравнения $f'(x)=0$ $f'(x)=0$

- это стационарные точки.

в) Находим промежутки знакопостоянства производной. Промежутки, на которых производная положительна,
являются промежутками возрастания функции.

Промежутки, на которых производная отрицательна,
являются промежутками убывания функции.

Точки, в которых производная меняет знак с плюса на минус,
являются точками максимума.

Точки, в которых производная меняет знак с минуса на плюс,
являются точками минимума.

7. Найти значения функции в точках экстремума.

8. По данным исследования построить график функции.

Пример 1. Исследовать функцию и по результатам исследования построить график.

$f(x) = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$

Решение.

1) D(f): R

2) Проверим функцию на чётность/нечётность:

$f(-x) = (-x)^3 - \frac{5}{2}\cdot(-x)^2 - 2\cdot(-x) + \frac{3}{2} = -x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{3}{2}$

$f(-x) \neq f(x), f(-x) \neq -f(x)$, значит, данная функция не является чётной или нечётной.

3) Функция непериодическая.

4) Нули функции.

С осью *Oy*:

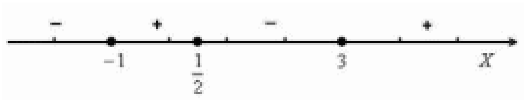
$y = f(0) = 0^3 - \frac{5}{2}\cdot 0^2 - 2\cdot 0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$

Чтобы найти точки пересечения с осью Ох (нули функции) требуется решить уравнение *f(x) = 0*:

$x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$

$(x+1)\cdot\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 0$

$x = -1, x = \frac{1}{2}, x = 3$



5) Таким образом, на интервалах $(-\infty;-1), \left(\frac{1}{2};3\right)$ $(-\infty;-1), \left(\frac{1}{2};3\right)$ график расположен ниже оси абсцисс *f(x), а на интервалах* $\left(-1;\frac{1}{2}\right), (3;+\infty)$ $\left(-1;\frac{1}{2}\right), (3;+\infty)$ *– выше данной оси f(x) 0.*

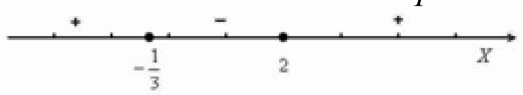
6) Возрастание, убывание.

Найдём критические точки:

$f'(x) = \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right)' = 3x^2 - 5x - 2 = 0$

$x = -\frac{1}{3}, x = 2$

Отложим их на числовой прямой и определим знаки производной:



1

Следовательно, функция возрастает на и убывает на $\left(-\frac{1}{3};2\right)$ $\left(-\frac{1}{3};2\right)$.

7). Экстремумы функции

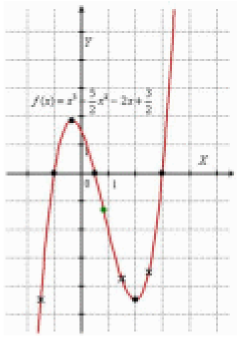
$x = -\frac{1}{3}$ $x = -\frac{1}{3}$ *точка максимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «+» на «-»*

.$x=2$ *точка минимума, так как при переходе через нее производная меняет знак с «-» на «+».*

8). $f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} - \frac{5}{18} + \frac{2}{3} + \frac{3}{2} = \frac{50}{27} \approx 1{,}85$

: $f(2) = 8 - 10 - 4 + \frac{3}{2} = -\frac{9}{2} = -4\frac{1}{2}$.

9) Строим график функции.



<u>Задание :</u> Исследовать и построить график функции

Вариант 1: $f(x)=3x^3-9x$

Вариант 2: $f(x)=x^4-8x^2+9$

Вариант 3: $f(x)=-x^4+8x^2-10$

Вариант 4: $f(x)=-x^3+12x-15$

Вариант 5: $f(x)=x^3-3x-7$

Вариант 6: $f(x)=x^3-12x-7$

Вариант 7: $f(x)= \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 8x$

Вариант 8: $f(x)= -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 5$

Вариант 9: $f(x)= -\frac{1}{3}x^3 + 16x + \frac{2}{3}$

Вариант 10: $f(x)=x^3+6x^2-4$

Вариант 11: $f(x)=x^3+3x^2+20$

Вариант 12: $f(x)=-x^3+3x-4$

Вариант 13: $f(x)= 2+3x-x^3$

Вариант14: $f(x)= \frac{1}{4}x^3-3x$

Вариант 15: $f(x)= -\frac{1}{4}x^4+2x^2-4$

Вариант 16: $f(x)=\frac{1}{2}x^4-4x^2 +8$

Вариант 17: $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Вариант 18: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Вариант1 9: $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Вариант 20: $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2$

Вариант 21: $f(x)=2x^3-3x^2+5$
Вариант 22: $f(x)=2x^3-3x^2$
Вариант 23: $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{5}x^5$
Вариант 24: $f(x)=-x^3+3x+2$
Вариант 25: $f(x)=x^3-x^2$
Вариант 26: $f(x)=x^3-3x-7$
Вариант 27: $f(x)=x^4-8x^2+9$
Вариант 28: $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x^2+8x$
Вариант 29: $f(x)=-x^3+12x-15$
Вариант 30: $f(x)=x^3+3x^2+20$

Практическая работа № 8 «Применение производной при решении задач».

Цель: Отработать навыки вычисления производной, применения производных при решении задач

Вариант 1.

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу:

Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный его за промежуток времени t в секундах, выражается формулой $S=x^4+2x^2+\frac{1}{2}x$.

   1. Найти скорость точки в любой момент времени.
   2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
   3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
   4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2. Используя геометрический смысл производной решить задачу:

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=x^3-3x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3. Найти точки перегиба функции $f(x)=x^3-6x^2+x+3$.

Вариант 2.

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу:

Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный его за промежуток времени t в секундах, выражается формулой $S = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + x$.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2. Используя геометрический смысл производной решить задачу:

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3. Найти точки перегиба функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 6$.

Вариант 3.

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу:

Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный его за промежуток времени t в секундах, выражается формулой $S = 0{,}4x^4 + x^2 + 0{,}7x$.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

2. Используя геометрический смысл производной решить задачу:

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3. Найти точки перегиба функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 2$.

Вариант 4.

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу:

Точка движется так, что путь *S* в метрах, пройденный его за промежуток времени *t* в секундах, выражается формулой $S=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x$.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент *t* = 3 с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент *t* = 4 с.

2. Используя геометрический смысл производной решить задачу:

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3+\frac{1}{2}x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

3. Найти точки перегиба функции $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+3$.

Вариант 5.

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу:

Точка движется так, что путь *S* в метрах, пройденный его за промежуток времени *t* в секундах, выражается формулой $S=0{,}25x^4+0{,}5x^2+0{,}5x$.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент *t* = 3 с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент *t* = 4 с.

1. Используя геометрический смысл производной решить задачу:

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y=2x^3-x^2$ в точке с абсциссой $x_0=-2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

1. Найти точки перегиба функции $f(x)=x^3+6x^2-x-3$.

Вариант 6.

1. Используя механический смысл первой и второй производной ($v(t) = S'(t)$; $a(t) = v'(t)$) решить задачу:

Точка движется так, что путь S в метрах, пройденный его за промежуток времени t в секундах, выражается формулой $S = \frac{1}{2}x^4 + 3x^2 + \frac{1}{2}x$.

1. Найти скорость точки в любой момент времени.
2. Вычислить скорость точки в момент $t = 3$ с.
3. Найти ускорение точки в любой момент времени.
4. Вычислить ускорение точки в момент $t = 4$ с.

1. Используя геометрический смысл производной решить задачу:

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $y = 2x^3 + \frac{1}{2}x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$. Написать уравнение касательной в этой точке.

1. Найти точки перегиба функции $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 3$.

Практическая работа 11

Вычисление неопределенных интегралов различными методами

Цель: Закрепить навыки интегрирования рациональных функций, интегрирования методом замены переменной и интегрирования по частям.

Теоретические сведения к практической работе:

Интегрирование - это действие, обратное дифференцированию. С помощью интегрирования по данной производной или дифференциалу функций находится сама функция.

Дифференцируемая функция *F(x), a* ¿ $x<b$ называется ***первообразной*** для функции *f(x)* на интервале *a* ¿ $x<b$, если $F'(x)=f(x)$ для каждого *a* ¿ $x<b$.

Так, для функции *f(x)* = cosx первообразной служит функция *F(x) = sinx,* поскольку $(sinx)'$ = *cosx.*

Для заданной функции ее первообразная определяется неоднозначно.
Если *F(x)* – первообразная для *f(x)* на некотором промежутке, то и функция *F(x) + C*, где *C* – любая постоянная, также является первообразной для функции *f(x)* на этом промежутке. Обратно: каждая функция, являющаяся первообразной для *f(x)* в данном промежутке, может быть записана в виде *F(x) + C.*

Совокупность *F(x) + C*всех первообразных функции *f(x)* на интервале *a* ¿ $x<b$ называют ***неопределенным интегралом*** от функции *f(x)* на этом интервале и пишут $\int f(x)dx$ = *F(x) + C.* Здесь $f(x)dx$ – подынтегральное выражение; *f(x)* – подынтегральная функция; *x* – переменная интегрирования; *C* – произвольная постоянная.

Пример:

$\int \frac{dx}{\cos^2 x}$ =*tgx + C*, так как $(tgx+C)'$ = $\frac{1}{cosx}$.

Если функция *f(x)* имеет на некотором промежутке хотя бы одну первообразную, то ее называют ***интегрируемой*** на этом промежутке. Можно доказать, что любая функция, непрерывная на отрезке *a* $\leq x \leq b$, интегрируема на этом отрезке.

Свойства неопределенного интеграла

1.*Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:*

$d\int f(x)dx=f(x)\,dx.$

2.Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложной с произвольной постоянной, т. е.

$\int dF(x)=F(x)+C.$

3.Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$\int af(x)dx=a\int(x)dx.$

4.Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции:

$\int(f_1(x)\pm f_2(x))dx=\int f_1(x)dx\pm\int f_2(x)dx.$

Способы интегрирования

Под ***непосредственным интегрированием*** понимают такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

1.$\int dx=x+C$/

2.$\int x^n dx=(x^{n+1}/n+1)+C$ ($n\neq-1$).

3.$\int x^{-1}dx=\int dx/x=\ln|x|+C$.

4.$\int e^x dx=e^x+C$.

5.$\int a^x dx=a^x/\ln a+C$.

6.$\int \sin x dx=-\cos x+C$.

7.$\int \cos x dx=\sin x+C$.

8.$\int dx/\cos^2 x = \mathrm{tg}x+C$.

9.$\int dx/\sin^2 x = -\mathrm{ctg}x+C$.

10.$\int dx/\sqrt{1-x^2} = \arcsin x+C$.

11.$\int dx/1+x^2 = \mathrm{arctg}x+C$.

Если интеграл затруднительно привести к табличному с помощью элементарных преобразований, то в этом случае пользуются ***методом подстановки***.

Пример.

Найти$\int xdx/\sqrt{2-3x^2}$.

Решение. Проведем подстановку $2-3x^2=t$; тогда $-6xdx=dt$, $xdx=-(1/6)dt$. Далее, получаем$\int xdx/\sqrt{2-3x^2}=\int-(1/6)dt/\sqrt{t}=-1/6\int t^{-1/2}dt=-1/6\cdot t^{-1/2+1}/(-1/2+1)+C=-1/6\cdot t^{1/2}/1/2+C=-1/3\sqrt{t}+C=-1/3\sqrt{2-3x^2}+C$.

Пример.

Найти $\int(2+\cos x)^2\sin x dx$.

Решение. Сначала положим $2+\cos x=t$; тогда $–\sin x dx=dt$,откуда $\sin x dx=-dt$. Далее, получаем

$\int(2+\cos x)^2\sin x dx=\int t^2(-dt)=-\int t^2dt=-t^{2+1}/(2+1)+C=-1/3t^3+C=-1/3(2+\cos x)^3+C$.

Пример.

Найти $\int\sin 10x dx$.

Решение. Положим $10x=t$;тогда$10dx=dt$, откуда $dt=(1/10)dt$. Далее получаем

$\int\sin 10x dx=\int\sin t 1/10dt=1/10\int\sin t dt=1/10(-\cos t)+C=-1/10\cos t+C=-1/10\cos 10x+C$.

В практике интегрирования часто встречаются интегралы, для нахождения которых можно использовать следующие формулы (k≠0, n≠0-постоянные):

1.$\int e^{kx}dx=(1/k)e^{kx}+C$.

2.$\int a^{kx}dx=(1/k)(a^{kx}/lna+C$.

3.$\int sinkxdx=(-1/k)coskx+C$.

4.$\int coskxdx=(1/k)sinkx+C$.

5.$\int dx/cos^2kx=(1/k)tgkx+C$.

6.$\int dx/sin^2kx=(-1/k)ctgkx+C$.

7.$\int dx/k^2+n^2x^2=(1/nk)arctg\ (n/k)x+C$.

8$\int dx/\sqrt{}k^2-n^2x^2=(1/n)arcsin(n/k)x+C$.

Так, при вычислении ∫sin10xdx можно использовать формулу ∫sinkxdx=-(1/k)coskx+C, где k=10. Тогда ∫sin10xdx=(-1/10)cos10x+C.

Интегрирование по частям. Общая формула интегрирования по частям имеет вид: $\int udv=uv-\int vdu,$ где $u u v$ – некоторые функции от x.

Пример.

Вычислить интеграл $\int x\sin xdx$.

<u>Решение.</u> Обозначим $x = u$, $\sin xdx = dv$, находим du и v . $du = dx$,

$v = \int x\sin xdx$ = - $\cos x$, найдем $\int x\sin xdx$ = $-x \cos x$ + $\int \cos xdx$ = $-x$ $\cos x$ + $\sin x$ + C.

Задание

№	Задание
1	, , $\int \sqrt[4]{x}dx$,
2	, , $\int \sqrt[3]{x}dx$,
3	, , $\int \sqrt[5]{x}dx$,
4	, , $\int \sqrt[9]{x}dx$,
5	, , $\int \sqrt[7]{x}dx$,
6	, , $\int \sqrt[11]{x}dx$,
7	, , $\int \sqrt[8]{x}dx$, $\int 6e^{3x-2}dx,$

8	, , $\int \sqrt[14]{x}\,dx$, $\int 7e^{4+7x}\,dx$,
9	, , $\int \sqrt[15]{x}\,dx$,
10	$\int 3x^2(4-x)^2\,dx$, , $\int \sqrt[13]{x}\,dx$, $\int 4e^{4-7x}\,dx$,

Практическая работа №12, 13

Тема: «Вычисление определённых интегралов. Применение определённого интеграла в практических задачах»

Цель: закрепление практических навыков вычисления определённых интегралов.

Содержание работы.

1.Внимательно изучите теоретический материал.

2.Выполните предложенное задание

ПРИМЕР 1. Вычислить

$$\int_1^2 e^{2x}\,dx.$$

РЕШЕНИЕ. По формуле $\int e^{kx}dx = \frac{1}{k}e^{kx} + C,$ получим

$$\int_1^2 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{1}{2}e^2(e^2 - 1).$$

ПРИМЕР 2. Вычислить

$$\int_1^2\left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx.$$

РЕШЕНИЕ.

$$\int_1^2\left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right)dx = 4\int_1^2\frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4dx + 2\int_1^2\sqrt{x}\;dx =$$

$$= 4\ln|x|\Big|_1^2 - 5\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_1^2 = 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1^5) +$$

$$+\frac{4}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\sqrt{1}\right) = 4\ln 2 + \frac{8}{3}\sqrt{2} - 32\frac{1}{3}.$$

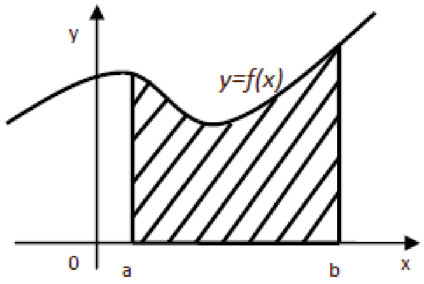
На практике очень часто приходится решать следующие задачи:

1) найти путь точки, движущейся прямолинейно, по заданному закону изменения скорости этой точки;

2) вычислить площадь фигур, которые имеют форму криволинейной трапеции;

3) вычислить объем тел, полученных вращением вокруг оси какой-либо криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция - это фигура, ограниченная графиком непрерывной и не меняющей своего знака на отрезке *[a; b]* функции, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком *[a; b]*.



Площадь криволинейной трапеции вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница:

Пример 1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5x+6$ и осью OX.

Решение. Найдем точки пересечения параболы с осью OX:

$-x^2+5x+6=0$

Имеем корни квадратного уравнения: $x_1=-1$, $x_2=6$.

Построим график функции $y=-x^2+5x+6$.

Пределы интегрирования: -1 и 6.

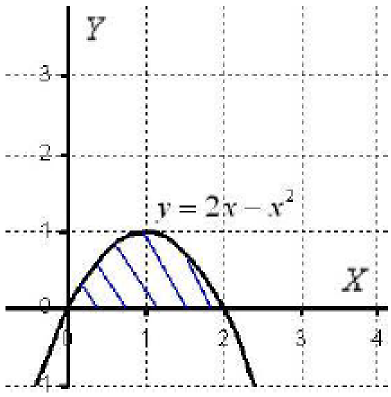
По формуле найдем площадь фигуры, ограниченной сверху параболой и снизу осью OX

$$\int_{-1}^{6}\left(-x^2+5x+6\right)dx=-\int_{-1}^{6}x^2dx+5\int_{-1}^{6}x\,dx+6\int_{-1}^{6}dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}+6x\right)\Bigg|_{-1}^{6}=$$

$$=\left(-\frac{6^3}{3}+5\cdot\frac{6^2}{2}+6\cdot6\right)-\left(-\frac{(-1)^3}{3}+5\cdot\frac{(-1)^2}{2}+6\cdot(-1)\right)=-72+90+36-\frac{1}{3}-\frac{5}{2}+6=$$

$$=60-\frac{5}{2}-\frac{1}{3}=60-\frac{17}{6}=60-2\frac{5}{6}=57\frac{1}{6}$$

Ответ: $S_ф = 57\frac{1}{6}$ (кв.ед.)



Пример 2. Вычислить объем тела, полученного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=0$ вокруг оси OX.

Решение. Построим фигуру, ограниченную линиями $y=2x-x^2$, $y=0$, здесь уравнение $y=0$ задаёт ось OX. Плоская заштрихованная фигура вращается вокруг оси X. В результате вращения получается «яйцевидное» тело, которое симметрично относительно оси OX. В практических заданиях плоская фигура иногда может располагаться и ниже оси OX. Это ничего не меняет – функция в формуле возводится в квадрат: $f^2(x)$, таким образом, **объем тела вращения всегда неотрицателен**. Вычислим объем тела вращения, используя формулу

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)dx=\pi\int_0^2(2x-x^2)^2dx=\pi\int_0^2(4x^2-4x^3+x^4)dx=$$

$$=\pi\cdot\left(\frac{4x^3}{3}-x^4+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\pi\cdot\left(\frac{32}{3}-16+\frac{32}{5}-0\right)=\frac{16\pi}{15}$$

Ответ: $V=\frac{16\pi}{15}\,ед^3.\approx 3{,}35\,ед^3.$

Пример 3. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением *v=3t2-4t+7*. Найдите закон движения точки, если в начальный момент движения *S=1м.*

Решение. Воспользуемся формулой 1 приложения неопределенного интеграла

$\int v(t)dt=S(t)+c$, $\quad S$ – перемещение, v - скорость

$$\int(3t^2-4t+7)dt=3\cdot\frac{t^3}{3}-4\cdot\frac{t^2}{2}+7t+c=t^3-2t^2+7t+c$$

Г.к. при *t=0 S=1*, то $0^3-2\cdot 0^2+7\cdot 0+c=1\quad c=1$

Ответ*: S(t)=* t^3-2t^2+7t+1 *(м)*

<u>Задание для самостоятельного решения:</u>

Вариант 1

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^3\left(x^4+4^x\right)dx$; б) $\int_4^5\frac{2dt}{t+1}$; в) $\int_0^{10}\left(5x+3e^x-\sqrt[5]{x^2}\right)dx$; г) $\int_2^3(2x-1)^3dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(2t-1)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой за 3-ю секунду.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-5x-6, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=\sqrt{x}, y=0, x=9$. Сделайте чертеж.

Вариант 2

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^2\left(x^5+5^x\right)dx$; б) $\int_3^5\frac{3dt}{t-1}$; в) $\int_0^7\left(e^{-2x}+4x+\sqrt[3]{x}\right)dx$; г) $\int_2^3(2x+1)^3dx$.

2. Решите задачу. Скорость движения точки определяется по закону $v=(3t+2)^2$ м/с. Найдите путь, пройденный точкой от начала движения до момента времени 4с.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=8x-x^2-7, y=0$. Сделайте чертеж.
4. Найдите объем тела, образованного вращением вокруг оси ОХ фигуры, ограниченной линиями $y=2+x, x=1, x=2, y=0$. Сделайте чертеж.

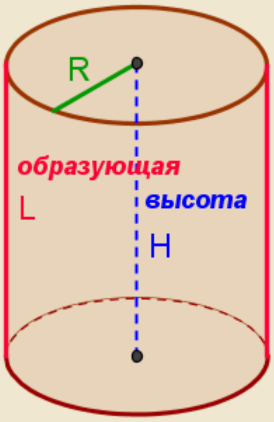
Практическая работа №15

Вычисление объемов и площадей поверхности тел вращения.

Цель: закрепить навык решения практических задач на нахождение площадей и объемов тел вращения.

Теоретические сведения к практической работе:

Цилиндр



Боковая поверхность

$S_{бок} = 2\pi RH,$

где R- радиус круга, являющегося основанием,

H- высота цилиндра.

Полная поверхность

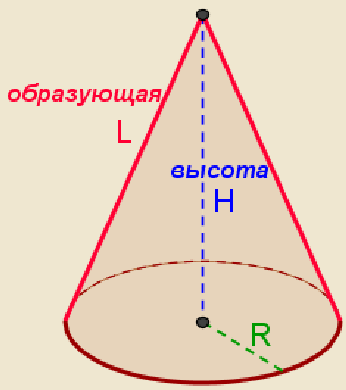
$S_{полн} = 2\pi R(R+H)$

$S_{ос.сеч.} = 2H \cdot R$

Объем

$V = \pi R^2 H = S_{осн} \cdot H$

Конус



Боковая поверхность

$S_{бок} = \pi RL,$

где R- радиус круга, являющегося основанием,

L- образующая конуса.

Полная поверхность

$S_{полн} = \pi R(R+L)$

$S_{ос.\ сеч.} = H \cdot R$

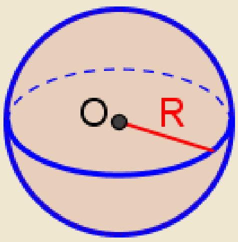
Объем

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H,$

$V = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot H$

где H- высота конуса.

Шар

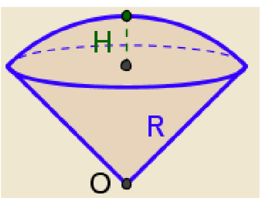
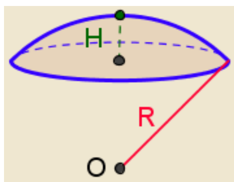


Площадь сферы

$S = 4\pi R^2$

Объем шара

$V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Шаровой сектор	**Шаровой сегмент**
 $S_{полн} = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2})$ $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$	 $S_{бок} = 2\pi RH$ $V = \frac{1}{3}\pi H^2(3R - H)$

1 вариант
Выполните задания

1 уровень

1. Цилиндром называется тело, ограниченное поверхностью:
   А) Конической; Б) Концентрической; В) Цилиндрической; Г) Сферической.
2. Осевым сечением цилиндра является:
   А) Треугольник; Б) Круг; В) Прямоугольник; Г) Трапеция.
3. Назовите элемент, не принадлежащий конусу:
   А) Образующая; Б) Ось; В) Высота; Г) Медиана.
4. Сфера является поверхностью:
   А) Конуса; Б) Усеченного конуса; В) Цилиндра; Г) Шара.

5.Сколько можно провести диаметров через точку, произвольно взятую внутри шара?
А) Одну; Б) Ни одной; В) Две; Г) Бесконечно много.

6. Проекцией тела в горизонтальной плоскости является круг, а в вертикальной плоскости – равнобедренный треугольник. Определите форму тела.
А) Цилиндр; Б) Пирамида; В) Конус; Г) Шар.

7. Как изменится объем шара, если радиус увеличить в 2 раза?
А)Увеличится в 8 раз; Б)Не изменится; В)Увеличится в 4 раза; Г)Увеличится в 2 раза.

2 уровень

8.Образующая конуса равна 7 см, а высота – 6 см. Вычислите объем конуса.
А) 26π см^3; Б) 26 см^3; В) 13π см^3; Г) 24π см^3.

9.Прямоугольник со сторонами 5 см и 4 см вращается вокруг большей стороны. Вычислите объем тела вращения.
А) 100π см^3; Б) 80π см^3; В) 180π см^3; Г) 80 см^3.

10.Осевым сечением цилиндра является квадрат со стороной 6 см. Найти площадь боковой поверхности цилиндра.
1) 36π см^2; 2) 18π см^2; 3) 9π см^2.

11.По какой формуле вычисляется площадь сферы.
1) $4\pi r^2$; 2) πr^2; 3) $\frac{4}{3}\pi r^2$.

3 уровень

12.Образующая конуса длиной 8 см наклонена к основанию под углом 60°. Найти площадь полной поверхности конуса
1) 32π см^2; 2) 64π см^2; 3) 48π см^2.

13. Найдите объём шарового сектора, если радиус шара равен $3\sqrt{2}$ см, а радиус окружности основания - $\sqrt{10}$ см.
а) $36\sqrt{2}\pi$ см^3; б) $12\sqrt{2}\pi$ см^3; в) $6\sqrt{2}\pi$ см^3; г) $8\sqrt{2}\pi$ см^3; д) $4\sqrt{2}\pi$ см^3.

2 вариант
Выполните задания

1 уровень

1. Назовите элемент, не принадлежащий цилиндру:
   А) Апофема; Б) Высота; В) Образующая; Г) Радиус.
2. Конус не может быть получен вращением:
   А) Прямоугольника вокруг одной из сторон; Б) Равностороннего треугольника вокруг медианы; В) Прямоугольного треугольника вокруг одного из катетов; Г) Равнобедренного треугольника вокруг высоты.
3. Выявите формулу, не относящуюся к вычислению площади поверхности или объема конуса, где l – образующая, R – радиус, H – высота:

А) πRl ; Б) $\pi R(l+R)$; В) πRH ; Г) $\frac{1}{3}\pi R^2 H$.

4. Сфера и плоскость не могут иметь:
А) Одну общую точку; Б) Ни одной общей точки; В) Две общие точки; Г) Много общих точек.

5. Сколько осей симметрии у цилиндра?
А) Одна. Б) Ни одной. В) Две. Г) Бесчисленное множество.

6. В горизонтальной и вертикальной плоскости проекциями тела являются круги. Определите форму тела.
А) Конус; Б) Цилиндр; В) Шар; Г) Усеченный конус.

7. Радиус цилиндра увеличили в два раза, а высоту уменьшили в два раза. Как изменится объем цилиндра?
А)Увеличится в 2 раза. Б)Уменьшится в 2 раза. В)Не изменится. Г)Увеличится в 4 раза.

2 уровень

8.Угол при вершине осевого сечения конуса 60°. Образующая конуса 6 см. Найти площадь полной поверхности конуса.
1) 36 π см^2; 2) 18 π см^2; 3) 27 π см^2.

9.Прямоугольник АВСД (АВ – 5 см, АД – 4 см) вращается вокруг оси, содержащей сторону СД. Найти площадь боковой поверхности полученного цилиндра
1) 40 π см^2; 2) 20 π см^2; 3) 56 π см^2.

10. Около прямоугольного параллелепипеда, измерения которого равны 2 см, 4 см и 4 см описана сфера. Вычислите площадь поверхности сферы.
А) 250π см^2; Б) 25π см^2; В) 50π см^2; Г) 36π см^2.

3уровень

11. Высота равностороннего цилиндра равна 10 см. Вычислите его объем.
А) 250π см^3; Б) 20π см^3; В) 250 см^3; Г) 50π см^3.

12. Равнобедренный треугольник с основанием 8 см и боковыми сторонами по 5 см вращается вокруг высоты, проведенной к основанию. Вычислите объем тела вращения.
А) 26π см^3; Б) 16π см^3; В) 36π см^3; Г) 16 см^3.

13. Определить объём шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см.
а) 125π см^3; б) 112500 π см^3; в) 1125π см^3; г) 2500 π см^3; д) 112550 π см^3